О разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде: алгебраические идеи в работах Поля Пенлеве

Доклад на научном семинаре по математическому моделированию в РУДН

Мих. Дмитр. Малых

11 апреля 2013 г., версия от 17 апреля 2013 г.

1 Вступление

Вступление

Когда в теории Галуа доказывают неразрешимость уравнения в радикалах, подчеркивают, что сам вопрос о том, почему уравнение хотят решить именно в радикалах, выходит за рамки теории. По аналогии с этим считают, что список элементарных функций тоже является предметом договора, хотя практика подсказывает обратное: все общеупотребимые трансцендентные функции были известны еще во времена Гаусса.

Во второй половине XIX века было предложена два подхода к проблеме решения нелинейных дифференциальных уравнений «в конечным виде». Первый связывают с именем Софуса Ли, второй – с Полем Пенлеве.

Подход Ли

В теории Галуа рассматривают конечную группу преобразований, переводящих корни алгебраического уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

в корни этого же уравнения. По аналогии с этим Софус Ли стал рассматривать непрерывные группы преобразований, переставляющих интегральные кривые дифференциального уравнения

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0.$$

Подход Ли

Если известна однопараметрическая группа таких преобразований:

$$x' = x + \varepsilon\xi(x, y) + \ldots, \quad y' = y + \varepsilon\eta(x, y) + \ldots,$$

то выражение

$$\mu = p\xi + q\eta$$

является интегрирующим делителем уравнения:

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = \mu du.$$

Напр., для

$$F(y/x)dx - dy = 0$$

угадать группу нетрудно:

$$x' = (1 + \varepsilon)x, \quad y' = (1 + \varepsilon)y, \quad \mu = F(y/x)x - y.$$

CAS: Soldier, 1967

В 1960-х года Мозес (Joel Moses , 1967 [1], [2]) создал первую система компьютерной алгебры, умевшая решать оду «аналитически». Эта программа отыскивала интегрирующие множители определенного вида. Напр., оду имеет множитель вида

$$\mu = f(y),$$

если

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = 0$$

Проверять каждый раз это соотношение руками утомительно, и напротив, вставить такую проверку в программу совсем не трудно.

CAS: Maple, 1997

В 1990-х на смену элементным методам интегрирования пришел групповой анализ, напр., пакет `DETools` в `Maple`. Его разработкой занималась большая группа под руководством Чеб-Терраба (E.S. Cheb-Terrab, 1997 [3]). Этот пакет ищет инфинитезимальный оператор (ξ, η) определенного вида, напр.,

$$\{\xi = 0,\, \eta = f(x)\}, \quad \{\xi = 0,\, \eta = f(y)\}, \ldots$$

Окончательная теория здесь получилась бы, если бы можно было перечислить все виды оператора, при которых за конченое число шагов можно выяснить, имеет заданное уравнение такую группу, или нет.

Тестирование пакета `DETools` на уравнениях из Камке

78 % из взятых в рассмотрение 552 уравнений имеют группу одного и того же вида:

$$\xi = f(x),\, \eta = g(x)y + h(x);$$

Чеб-Терраб и Колокольников (2000 г. [4]) называли ее линейной.

- Уравнение Риккати всегда допускает линейную группу
- Для любого уравнения можно за конечное число шагов выяснить, допускает ли уравнение линейную группу
- Если уравнение отлично от уравнения Риккати, то коэффициенты f, g, h можно вычислить за конечное число шагов.

Свойство Пенлеве

Если общее решение дифференциального уравнения

$$f(y^{(n)}, \ldots, y, x) = 0$$

имеет в качестве подвижных особых точек на комплексной плоскости разве только полюса, то говорят, что это уравнение обладает свойством Пенлеве и надеются, что такое решение можно будет описать при помощи отношения двух всюду сходящихся степенных рядов.

Главный недостаток этой теории – алгебраическая неинвариантность: простейшее алгебраическое преобразование координат уничтожает свойство Пенлеве.

Свойство Пенлеве-2

- Среди уравнений вида $y' = f(x,y)$ с рациональной по y правой частью свойством Пенлеве обладает только уравнение Риккати.
- Среди уравнений вида $y'' = f(x,y,y')$ свойством Пенлеве обладает ряд уравнений, решения которых представляют собой новые трансцендентные мероморфные функции. Таково, напр., уравнение $y'' = 6y^2 + x$.
- К настоящему моменту закончена классификация уравнений вида
$$y^{(n)} = \sqrt[m]{f(x,y,\ldots,y^{(n)})},$$
новых трансцендент она не добавила (Соболевский С.Л., 2006 [5]).

Тест Пенлеве

Единственный конструктивный способ для выявления уравнений со свойством Пелеве – тест Пенлеве. К сожалению, как это выяснил еще Шази (Chazy J., 1911 г. [6], стр. 202), этот тест «срабатывает» на особых решениях. Напр., уравнение Шази
$$y'' = -y^3y' + yy'\sqrt{4y' + y^4}$$
имеет общее решение
$$y = A\operatorname{tg}(A^3z + B)$$
с подвижными полюсами и особое решение
$$y = \sqrt[3]{\frac{4}{3(x-C)}}$$
с подвижной алгебраической особой точкой. Современные авторы понимают свойство Пенлеве шире Пенлеве как свойство любого семейства решений, а не только общего решения.

Теорема сложения

Употребление трансцендентных Пенлеве на практике осложнено как раз тем, что они не обладают теоремой сложения. Все элементарные функции, равно как и эллиптические обладают алгебраической теоремой сложения, то есть $f(x+y)$ можно выразить алгебраически через $f(x)$ и $f(y)$.

Для решения задачи Коши, скажем, для уравнения $\dot{x} = x$ нужно составить таблицы значений одного частного решения этого уравнения и только при малых t, все остальное получится из теоремы сложения для e^t.

Теорема сложения и локальная теорема Коши

Вейерштрасс в свой дипломной работе (1840 г.) распространил эту идею на эллиптические функции и связанные с ними дифференциальные уравнения. Здесь он доказал то, что мы теперь называем локальной теоремой Коши, и при помощи теоремы сложения сделал ее глобальной – доказал мероморфность эллиптических функций.

Теорема 1 (Вейерштрасс, 1860-е г., Эрмит, 1873 [6], стр. 113)**.** *Алгебраической теоремой сложения обладают только рациональные функции от x или от e^x и эллиптические функции.*

Алгебраические идеи в работах Пенлеве

Если общее решение уравнения

$$f(\dot{x}, x, t) = 0$$

зависит от константы алгебраически, то для его представления достаточно табулировать конечное число трансцендентых функций одной переменной – коэффициентов этой функции.

Теорема 2 (Пенлеве, 1890 г.[7])**.** *Интегрирование алгебраического дифференциального уравнения*

$$F(\dot{x}, x; t) = 0,$$

общее решение которого зависит от константы алгебраически, вводит не более трех трансцендент, таковыми могут быть или решения уравнения Риккати, или одна эллиптическая функция.

Алгебраические идеи в работах Пенлеве-2

В Стокгольмских лекциях (1897 [8]) Пенлеве распространил эти результаты на уравнения 2-го порядка. Алгебраическая сторона этих идей Пенлеве, высказанных в аналитической форме, не обратила на себя внимание. Такому положению дел, вероятно, способствовало то досадное обстоятельство, что в работу 1890 г. вкралась ошибка, отмеченная и исправленная Пенлеве много позже [9].

Между тем, она, по моему мнению, может быть представлена как наиболее последовательное распространение теории Галуа на дифференциальные уравнения.

2 Постановка задачи

Система алгебраических дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\dot{x}_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; t), \dots \dot{x}_n = g_n(x_1, \dots x_n; t),$$

где g_i – алгебраические функции переменных $x_1, \dots x_n$, коэффициенты которых могут быть какими угодно аналитическими функциями t.

Нормальная форма

Теорема о примитивном элементе позволяет свести такую систему к *нормальной форме Вейерштрасса* [10]:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_{n+1}; t), \dots \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots x_{n+1}; t) \tag{1}$$

где f_i – рациональные функции переменных $x_1, \dots x_{n+1}$, коэффициенты которых могут быть какими угодно аналитическими функциями t, но сами переменные $x_1, \dots, x_{n+1}$ связаны алгебраическим уравнением

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; t) = 0,$$

где F — полином, коэффициенты которого зависят от t аналитически.

Рациональные интегралы

Рациональным интегралом (1) будем называть всякую отличную от константы функцию R, рациональную на гиперповерхности

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; t) = 0,$$

и постоянную на любом решении этого уравнения или, что то же, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{D}R = 0, \quad \mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Особого смысла рассматривать алгебраических интегралы нет, поскольку они выражаются алгебраических через рациональные интегралы [10].

Алгебраические интегралы движения

Чаще всего требуют, чтобы коэффициенты интегралов не завесили от времени или хотя бы выражались алгебраически через коэффициенты исходной системы.

Для уравнения первого порядка задача нахождения таких интегралов за конечное число шагов была решена М.Н. Лагутинским (1912 [12], [13]).

В теории гамильтоновых систем изучению таких интегралов положил начало Брунс (задача n тел). До сих пор часто упоминается гипотеза о связи между свойством Пенлеве и наличием алгебраических интегралов движения (Пенлеве, 1899; В.В. Голубев, 1953 [11], стр. 12) Однако в 1975 году Ю. Мозером [14] проинтегрировал гамильтонову систему, имеющую рациональные интегралы движения и общее решение, зависящее от t алгебраически. Тем не менее современные авторы пытаются «спасти» спасти гипотезу, см. [15], стр. 135.

Далее мы выпускаем этот случай из рассмотрения как не вводящий новых трансцендентных функций.

Поле основных функций

Известное поле функций переменной t, в котором лежат коэффициенты функций $f_1, \ldots, f_{n+1}, F$ будем называть полем основных функций и обозначать как K. Напр., для

$$\dot{x} = tx^2 + e^t$$

за таковое можно принять $K = \mathbb{C}(t, e^t)$. Однако в дальнейшем будет удобно считать K алгебраически замкнутым.

Это поле погрузим в поле K', в котором содержаться все «нужные» аналитические функции, в т.ч. решения дифференциального уравнения (1).

В теории Галуа полю K соответствует поле, над которым рассматривается алгебраическое уравнение, а полю K' – то, в котором это уравнение разлагается на линейные множители.

Рациональные интегралы

Рассмотрим поле рациональных функций на гиперповерхности

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; t) = 0$$

с коэффициентами из K'. *Рациональным интегралом* (1) будем называть всякий отличный от константы элемент R этого поля, постоянный на любом решении этого уравнения или, что то же, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{D}R = 0, \quad \mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Поле интегралов

Множество всех рациональных интегралов и констант из $\mathbb{C}$ мы будем называть *полем рациональных интегралов* системы (1) и обозначать как I. Степень трансцендентности этого поля над K конечна. Если несколько интегралов $R_1, \dots R_r$ зависимы над K, то есть

$$S(R_1, \dots R_n; t) = 0,$$

то они зависимы и над $\mathbb{C}$. Отсюда:

Теорема 3. *Поле интегралов I как расширение поля констант $\mathbb{C}$ бирационально эквивалентно полю рациональных функций на некоторой гиперповерхности, размерность которой в точности равна числу независимых рациональных интегралов уравнения 1.*

Трансценденты, вводимые интегрированием

Коэффициенты интегралов как аналитические функции t не обязаны принадлежать полю основных функций K, но могут образовывать и его расширение, лежащее в поле K'. Это поле будет *полем трансцендент*, вводимых интегрированием уравнения 1; оно будет играть роль поля разложения в теории Галуа.

Теорема 3 означает, что коэффициенты интегралов могут быть выражены рационально через конечное число аналитических функций, поле трансцендент, вводимых интегрированием 1, имеет конечную степень трансцендентности над полем основных функций K. Это число будем называть *числом трансцендент, вводимых интегрированием.*

Две основные задачи

- Перечислить все трансценденты, которые вообще могут возникнуть при интегрировании какой-нибудь системы алгебраических дифференциальных уравнений.

- Для заданной системы дифференциальных уравнений указать способ отыскания рациональных интегралов.

3 Решение

Автоморфизмы поля интегралов

Теорема 4. *Если интегрирование системы 1 вводит r трансцендент, то поле интегралов имеет r-параметрическую группу $\mathbb{C}$-автоморфизмов.*

Доказательство. (i) Базис поля трансцендент над K – скажем, функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ – удовлетворяются алгебраической системе дифференциальных уравнений.

(ii) Заменяя функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$ в интеграле $R(x, \alpha)$ на любое другое решение этой системы, опять получим интеграл. Тем самым будет задан автоморфизм поля интегралов. □

Связь с алгебраической геометрией

Теоремы 3 и 4 вмести утверждают, что поле интегралов эквивалентно полю рациональных функций на гиперповерхности, допускающей r-параметрическую группу бирациональных преобразований в себя. Это позволяет превратить любое утверждение теории автоморфизмов гиперповерхностей превратить в утверждение об интегралах системы дифференциальных уравнений.

4 Уравнение 1-го порядка

Алгебраические кривые

Интересующие нас свойства в случае алгебраических кривых можно описать одним числом – родом (gunes) кривой p. Это число можно определить различными, но эквивалентными способами:

- кривая над $\mathbb{C}$ топологически эквивалентна сфере с p ручками (Риман, Клейн [19]);

- существует рациональная функция с простыми полюсами в произвольных $p+1$ точках и число это нельзя уменьшить (Вейерштрасс [20]).

Уравнения 1-го порядка и алгебраические кривые

- Если $p = 0$, то кривая бирационально эквивалентна прямой. Поэтому $r \leq 3$.

- Если $p = 1$, то кривая бирационально эквивалентна эллиптической кривой $y^2 = x^3 + g_1 x + g_2$, допускающей лишь 1-параметрическую группу. Поэтому $r = 1$.

- Если $p > 1$, то имеется лишь конечное число преобразований кривой в себя.

Теорема 5. *Интегрирование алгебраического дифференциального уравнения*

$$F(\dot{x}, x; t) = 0$$

вводит не более трех трансцендент.

Пример № 1

Общее решение уравнения Риккати

$$\dot{x} = p(t)x^2 + q(t)x + r(t),$$

как известно, является дробно-линейной функцией константы:

$$\frac{\mathrm{A}_1(t)x + \mathrm{A}_2(t)}{\mathrm{A}_3(t)x + \mathrm{A}_4(t)} = \mathrm{Const}$$

Поэтому интегрирование уравнение Риккати вводит не более 3-х алгебраически независимых функций. При этом всякий рациональный интеграл уравнения Риккати является рациональной функций указанного, то есть поле интегралов бирационально эквивалентно полю рациональных функций на прямой.

Исследование групповых свойств уравнения Риккати было предметом последних работ Ли [16], гл. 24.

Пример № 2

Уравнение

$$\dot{x}^2 = x^3 + g_1 x + g_2 \quad \mapsto \quad x = \wp(t + C);$$

используя теорему сложения можно переписать это равенство

$$x = G(\wp(t), \wp(C))$$

и составить рациональный интеграл с коэффициентами, выражающимися алгебраически через $\wp(t)$ [17]. Поэтому интегрирование этого уравнения вводит одну эллиптическую функцию. Равенство

$$\sqrt{x^3 + g_1 x + g_2} = \wp'(t + C)$$

позволяет указать еще один рациональный интеграл. Значит, в этом случае поле интегралов эквивалентно полю рациональных функций на эллиптической кривой.

Описание трансцендент

Теорема 6 (Пенлеве, 1890 г. [7]). *Интегрирование алгебраического дифференциального уравнения*

$$F(\dot{x}, x; t) = 0$$

вводит не более трех трансцендент, таковыми могут быть или решения уравнения Риккати, или одна эллиптическая функция.

Пенлеве указал конструктивный способ интегрирования уравнения для $p = 1$; при $p = 0$ уравнение заменой сводится к уравнению Риккати, вопрос об интегрировании которого естественно рассматривать в теории линейных уравнений.

5 Жанр $p > 0$

Жанр поля интегралов

Два зависимых над $\mathbb{C}$ элемента поля I над $\mathbb{C}$ связаны некотором уравнением

$$G(r_1, r_2) = 0,$$

для которого можно указать род. Мы назовем *жанром* поля I наибольшее из получающихся таким путем родов, элементы, соответствующие этому значению рода, будем называть парой жанровых элементов.

Абелевы интегралы первого типа

Пусть жанр p поля интегралов больше нуля, R_1 и R_2 – жанровая пара, связанная уравнением $G(R_1, R_2) = 0$. Род p неприводимой кривой G совпадает с числом линейно независимых абелевых интегралов, не имеющих особенностей на кривой G, их называют интегралами первого типа (Art) [20], [21].

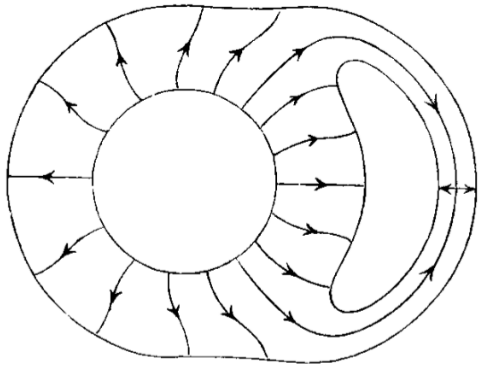
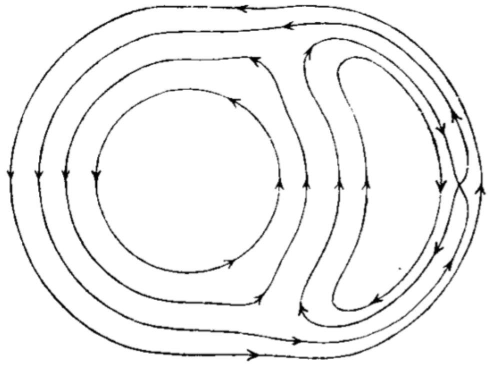
Напр., эллиптическая кривая

$$y^2 = x^3 + g_1 x + g_2$$

имеет один такой интеграл с точностью до мультипликативной константы, именно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + g_1 x + g_2}}.$$

Нестрогое док-во по Клейну

Линии уровня вещественной и мнимой частей абелева интеграла в окрестности неособой точки не имеют бесконечно малых овалов. На сфере ($p = 0$) нельзя указать такой системы линий, а на сфере с ручками ($p \geq 1$) можно [19].

Интегралы движения

Обозначим один из интегралов первого рода на кривой

$$G(\xi, \eta) = 0$$

как

$$\int H(\xi\eta) d\xi.$$

Тогда

$$\int\limits_{0}^{(R_1(x;t),R_2(x;t))} H(\xi\eta) d\xi$$

является *нерациональным* интегралом движения.

Свойства этого интеграла движения

- Производные этого интеграла по x_1, x_2 и t являются рациональными функциями на кривой F.
- Как бы ни менялась точка x на гиперповерхности F, этот интеграл остается конечным.
- Когда точка x замкнутый контур (даже кривая над $\mathbb{C}$ – двумерное вещественное многообразие), этот интеграл меняется на величину, не зависящую от t.

Линейное пространство Ω

Для заданной гиперповерхности $F(x;t)=0$ можно чисто алгебраическим путем построить множество Ω точных линейных 1-форм

$$P_1(x;t)dx_1+\cdots+P_n(x;t)dx_n$$

обладающих след. свойствами:

- P_i являются рациональными функциями на гиперповерхности F с коэффициентами из K'.
- Как бы ни менялась точка x на гиперповерхности F интеграл от этой формы остается конечным.
- Когда точка x замкнутый контур, этот интеграл меняется на величину (период), не зависящую от t.

Это пространство является конечномерным линейным пространством над полем $\mathbb{C}$, а коэффициенты P_i лежат в K.

Решение в квадратурах

Теорема 7. *Если жанр p поле интегралов больше нуля, то в линейном пространстве Ω имеется подпространство размерности p, образованное интегралами движения системы.*

Взяв базис Ω мы можем отыскать коэффициенты в $\mathbb{C}$ для интегралов, решив алгебраические уравнения. Новых трансцендентных функций t здесь получить нельзя. Таким путем можно получить p интегралов движения вида

$$\int P_{1i}(x;t)dx_1+\cdots+P_{ni}(x;t)dx_n=\int A_i(t)dt, \tag{2}$$

где $A_i(t)$ – функция из K и $i=1,\ldots,p$.

Обращение абелева интеграла

При $n<5$ интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P_n(x)}}=u \quad (P_n \text{ – многочлен степени } n)$$

берется: x можно выразить как мероморфную периодическую функцию u. При $n=2$ эта фукнция имеет один период, при $n=3,4$ – два комплексных периода. В 1833 г. Якоби обнаружил, что при $n>4$ этот интеграл имеет слишком много периодов и поэтому x нельзя выразить через u при помощи мероморфных функций.

Задача Якоби

Якоби «подправил» задачу [22]: если имеется p уравнений

$$\sum_{j=1}^{p} \int\limits_{(a,b)}^{(\xi_j,\eta_j)} H_i(\xi\eta)d\xi = u_i \quad (i = 1, \ldots, p),$$

то $\xi_1, \ldots \xi_p$ можно найти как корни алгебраического уравнения p-ой степени, коэффициенты которого являются меромрфными $2p$-периодическими функциями $u_1, \ldots, u_p$. Эти функции получили название абелевых функций. Абелевы функции бесполезны для решения задачи обращения интеграла

$$u = \int H_1(\xi\eta)d\xi,$$

и поэтому кажутся математическим вывертом.

Вычисление квадратур

Квадратурам (2) отвечают интегралы

$$\int H_i(\xi\eta)d\xi$$

на исходной кривой G. Составив для них абелевы функции, без труда получим:

Теорема 8. *Если поле интегралов системы* (1) *имеет жанр* $p > 0$*, то ее интегрирование вводит ровно* p *трансцендент. Эти функции представляют собой абелевы функции вида*

$$\mathrm{Al}_i\left(\int A_1(t)dt, \ldots, \int A_p(t)dt\right),$$

где A_j *– элементы поля* K *основных функций и* $i = 1, \ldots, p$.

Пример: гироскоп

Движение твердого тела с одной закрепленной точкой в поле силы тяжести описывается системой шести уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} &J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = mg(y_0\gamma_z - z_0\gamma_y), \ldots \\ &\dot{\gamma}_x = \omega_z\gamma_y - \omega_y\gamma_z, \ldots \end{aligned}$$

причем неподвижная точка принята за начало отсчета, (x_0, y_0, z_0) – координаты центра тяжести в системе координат, движущейся вместе с телом, а $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ – координаты орта, указывающего направление силы тяжести, в неподвижной системе координат.

Гироскоп Бонненбергера (Bohnenberger, Tübinger Stadtmuseum, XVIII c.)

Пример: гироскоп-2

Эта система обладает свойством Пенлеве в нескольких частных случаях и в каждом из них удается указать 4 рациональных интеграла движения, не зависящих явно от времени, и последний множитель $\mu = 1$.

Случай Лагранжа-Пуассона: $J_x = J_z$ и $x_0 = y_0 = 0$. Неизвестные функции выражаются через t при помощи эллиптических функций.

Случай С.В. Ковалевской: $J_x = J_y = 2J_z$ и $y_0 = z_0 = 0$. Г. Шварц изготовил гироскоп с такими необычными свойствами. Неизвестные функции даются как $\mathrm{Al}(C_1, t + C_2)$.

6 Жанр $p = 0$

Случай нулевого жанра

Если жанр поля интегралов равен нулю, то для любых двух зависимых интегралов можно указать третий, через который они выражаются рационально. Ср.: кривая рода нуль эквивалентна прямой.

Если степень трансцендентности поля интегралов равен 1, то все интегралы выражаются рационально через один $R(x; t)$ и при автоморфизмах поля интегралов этот элемент испытывает дробно-линейные подстановки. Это приводит к тому, что вводимые им трансценденты оказываются решениями уравнения Риккати.

Если степень трансцендентности поля интегралов равна 2, то такой элемент указать тоже можно и поэтому хотя бы часть трансцендент оказывается решениями уравнения Риккати.

Выводы

Система дифференциальных уравнений допускает интегрирование в конечном виде в двух случаях:

- Если жанр поля интегралов больше нуля, то вводимые интегрированием трасцендента – абелевы функции; имеется алгоритм, позволяющий отыскивать такие интегралы за конечное число действий.

- Если жанр поля равен нулю, а степень трансцендентности над полем основных функций равна 1 или 2, то хотя бы часть вводимых интегрированием трасцендент – решения уравнения Риккати.

Не связана ли сложность второго случая в большой размерности со сложностью теории гиперповерхностей?

Литература

Список литературы

[1] *Moses, J.* Symbolic integration. MIT Report, 1967.

[2] *Moses, J.* Symbolic integration: the stormy decade. // Communication of the ACM. Vol. 14, no. 8. (1971)

[3] *Cheb-Terrab E.S., Kolokolnikov T.* Computer Algebra Solving of First Order ODEs // Computer Physics Communications, 101 (1997) 254.

[4] *E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov* First order ODEs, Symmetries and Linear Transformations // Submitted to "European Journal of Applied Mathematics" - July 2000.

[5] *Соболевский С.Л.* Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 2006

[6] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1950.

[7] *Painlevé P.* Memoire sur les equations differentielles du primier ordre // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. Pag. 237-461.

[8] *Painlevé P.* Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. Paris, 1897 = Œuvres. T. 1. Paris, 1971

[9] *Painlevé P.* Приложение к книге P. Boutroux // Œuvres. T. 2. Paris, 1974. P. 767-813

[10] *Koenigsberger L.* Lerbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhägigen Variabeln. Leipzig: Tuebner, 1889.

[11] *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела. ГИТТЛ, 1953.

[12] *Лагутинский М.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений // Записки Имп. Харьковского университета. 1912 г.

[13] *Maciejewski A.J., Strelcyn J.-M.* On the algebraic non-integrability of the Halphen system // Препринт `http://ru.arxiv.org/abs/solv-int/9505002v1`, 2007 г.

[14] *Мозер Ю.* Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. Ижевск, 1999.

[15] *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. М.-Ижеквск, 2006.

[16] *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 2. М.-Ижевск, 2011.

[17] *Прасолов В.В., Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебарические уравнения. М.: Факториал, 1997.

[18] *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988

[19] *Klein F.* Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihre Integrale. Leipzig, Teubner, 1882.

[20] *Weierstrass K.* Math. Werke. Bd. 4. Berlin, 1902. Первые две части в моем пересказе доступны на malykhmd.narod.ru.

[21] *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.

[22] *Маркушевич А.И.* Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979.

[23] *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* Трансцендентные функции, вводимые интегрированием дифференциальных уравнений // Динамика сложных систем — XXI век. №3 за 2010 г.

Конец