

УДК 517.958; 621.372.8

О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения.*

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. Г. Свешников.

119992, ГПС-2, Москва, Воробьевы горы, МГУ, физич. ф-т;

`malykham@mtu-net.ru`

Представлена акад. В.А. Ильиным 3 апреля 2002 года.

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для волновода с заполнением. Указан критерий существования бесконечной последовательности собственных значений для заполнений типа "вставки". Показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения исчезают при малом вещественном возмущении заполнения.

Хотя к настоящему моменту известны примеры волноведущих систем, обладающих вложенными в непрерывный спектр собственными значениями, необходимые условия появления вложенных мод остаются неясными. Поэтому, как отмечалось в [1], целесообразно изучить, сохраняются ли эти моды при малых возмущениях параметров волноведущих систем, обладающих ловушечными модами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды 02-01-00271, 00-01-00111) и программы "Университеты России" (код УР.02.03.010)

Рассмотрим в волноводе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, y \in S\}$ с сечением S , представляющим собой односвязную конечную область в пространстве $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$, задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} \Delta u + eq(x, y)u = 0 & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

Фигурирующая здесь функция $q(x, y)$ характеризует заполнение волновода; будем считать, что волновод заполнен локально нерегулярно, то есть что $q(x, y)$ — кусочно-непрерывная функция и $\text{Supp } [q(x, y) - 1] \equiv \Omega' — конечная область, и что в волноводе отсутствует затухание, то есть что q — вещественная функция.$

Весьма распространенным на практике является случай, когда в полый волновод Ω , заполненный однородным веществом с $q = 1$, перпендикулярно к оси вставлена одна или несколько пластин с различными $q \neq 1$, то есть $q(x, y)$ является кусочно-непрерывной функцией только одного переменного x . В этом случае удастся доказать существование бесконечной последовательности собственных значений у задачи (1), более точно:

Теорема 1. Пусть α_n^2 — собственные значения задачи Дирихле на сечении S , а ψ_n — соответствующие им собственные функции. Если $1 \leq q_0(x) \leq Q$, то у задачи

$$\begin{cases} \Delta u + eq_0(x)u = 0 & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \end{cases} \quad (2)$$

при любом $n = 1, 2, \dots$ найдется собственное значение $e^{(n)}$, лежащее на интервале $(\frac{\alpha_n^2}{Q}, \alpha_n^2)$, которому отвечает собственная функция вида $u_n(x)\psi_n(y)$.

Замечание. На существование бесконечной последовательности собственных значений у волновода с заполнением типа вставки было указано в [2]. В [3] были получены упомянутые выше оценки и для ряда заполнений типа вставки вычислены собственные значения.

Эта теорема означает в частности, что при достаточно малых $q - 1$ уже собственное значение $e^{(2)}$ задачи (2) лежит выше α_1^2 , поэтому волновод обладает собственной функцией вида $u_0(x, y) = u_2(x)\psi_2(y)$, отвечающей собственному значению волновода $e^{(2)} > \alpha_1^2$, то есть вложенному в непрерывный спектр. Выясним теперь, сохранится ли оно, если мы возмутим это заполнение

$$q(x, y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x, y),$$

где q_1 — вещественная функция, а ε характеризует малость возмущения.

Как показано в [4], в достаточно малой окрестности однократного собственного значения e_0 невозмущенной задачи (2) может существовать не более одного собственного значения $e(\varepsilon)$ возмущенной задачи (1). Кроме того, если это собственное значение существует, то оно и соответствующая ему собственная функция $u(x, y; \varepsilon)$ являются аналитическими функциями от ε , регулярными в нуле.

Для доказательства следует воспользоваться резольвентой регулярного волновода, явное выражение которой имеет вид

$$R_0(e)v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\sqrt{e - \alpha_n^2}} \int_{\Omega} d\xi d\eta e^{i\sqrt{e - \alpha_n^2}|x - \xi|} \psi_n(\eta) \psi_n(y) v(\xi, \eta)$$

и отображает $L^2(\Omega')$ в $\overset{\circ}{W}_{2, \text{loc}}^1(\Omega)$. Сделав в (1) подстановку $u = R_0(e)v$, получим для v интегральное уравнение

$$v - \mathfrak{A}(e, \varepsilon)v = 0, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}(e, \varepsilon) = -e(q(x, y; \varepsilon) - 1)R_0(e). \quad (3)$$

Поскольку $\text{Supp } q - 1$ — ограничен, оператор $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$ является компактной оператор-функцией, голоморфной на римановой поверхности $\mathfrak{f}$ с точками ветвления α_n^2 . Эта процедура сведения исходной задачи к интегральному уравнению является модификацией процедуры, предложенной в [5], однако ее проще обосновать в случае, когда речь идет об обобщенных решениях.

Как показано в [4], множество собственных значений оператор-функции $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$, лежащих на главном листе (на котором все корни $\sqrt{e - \alpha_n^2}$ имеют главные значения), совпадает с множеством всех собственных значений

задачи (1). Если при $q = q_0$, оператор $\mathfrak{A}$ имеет однократное собственное значение e_0 , то в достаточно малой его окрестности существует единственное собственное значение $e(\varepsilon)$, зависящее от ε аналитически.

Если e_0 — изолированное однократное собственное значение задачи (2), то оно является однократным собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e, 0)$, лежащим внутри главного листа, а следовательно, в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$. Поскольку малая окрестности e_0 лежит на главном листе, $e(\varepsilon)$ — единственное возмущенное собственное значение задачи (1) с возмущенным заполнением, стремящиеся к e_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Однако, если e_0 — вложенное в непрерывный спектр собственное значение задачи (2), то оно является собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e, 0)$, лежащим на границе главного листа. Поэтому хотя в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$, это собственное значение может и не лежит на главном листе и значит, не быть собственным значением (1) с возмущенным заполнением. Это означает, что может существовать не более одного собственного значения возмущенной задачи (1), стремящегося к e_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом, если оно существует, то оно совпадет с соответствующим собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$, и следовательно, зависит от ε аналитически, как и утверждалось выше.

Предположим теперь, что при любом $q_1(x, y)$ в окрестности собственного значения $e_0 \equiv e^{(2)}$ существует собственное значение возмущенной задачи (1). Тогда это собственное значение и соответствующую ему собственную функцию можно разложить в ряды:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \dots, \quad u(x, y; \varepsilon) = u_2(x)\psi_2(y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots$$

Умножив (1) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению S , получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_S dy u(x, y) \psi_1(y) + e \int_S dy q(x, y) u(x, y) \psi_1(y) = \alpha_1^2 \int_S dy u(x, y) \psi_1(y).$$

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$\int_S dy u(x, y)_1 \psi_1(y) = u_{1,1}(x),$$

получим

$$\frac{d^2 u_{1,1}}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] u_{1,1} = e_0 u_2(x) \int_S dy q_1(x, y) \psi_1(y) \psi_2(y).$$

Для того чтобы $u(x, y; \varepsilon)$ принадлежало L^2 , необходимо, чтобы и $u_{1,1}(x)$ принадлежала $L^2(\mathbb{R}^1)$. Поскольку носитель возмущенного заполнения $q(x, y) - 1$ ограничен, это уравнение имеет решение, принадлежащее пространству L^2 , лишь при весьма специальных условиях на $q_1(x, y)$. Тем самым доказано следующее. (Ср. [6].)

Теорема 2. Существуют такие кусочно-непрерывные вещественные возмущения $q_1(x, y)$ исходного заполнения $q_0(x)$, что в окрестности невозмущенного собственного значения нет возмущенных собственных значений.

Более того, из доказательства видно, что собственное значение $e_0 = e^{(n)}$, отвечающее собственной функции $u_0(x, y) = u_2(x) \psi_2(y)$, устойчиво лишь к тем возмущениям, при которых уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] w = e_0 u_2(x) \int_S dy q_1(x, y) \psi_1(y) \psi_2(y) \quad (4)$$

имеет решение из $L^2(\mathbb{R}^1)$.

Простейшим примером, иллюстрирующим данное утверждение, является случай, когда

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in [0, +\pi]\}, \quad \Omega' = \{x \in [-1, 1], \quad y \in [0, +\pi]\}$$

и

$$q_0(x) = \begin{cases} q_0, & x \in (-1, +1) \\ 1 & \end{cases}.$$

Легко показать, что в этом случае наименьшее из собственных значений, собственные функции которых имеют вид $u_2(x)\psi_2(x)$, исчезает при возмущении вида

$$q_1(x, y) = \begin{cases} \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} \sin \sqrt{e_0 q_0 - \alpha_1^2} (x \pm 1) \cos \sqrt{\alpha_2^2 - e_0 q_0} x, & |x| < 1 \\ 1 & \end{cases} \quad (5)$$

если оно вложено в непрерывный спектр.

Основной смысл доказанной теоремы заключается в том, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода. Это свойство является довольно неожиданным, поскольку обычно собственное значение исчезает лишь при возмущении заполнения комплексной добавкой, то есть при введении затухания.

Литература

1. DAVIES E.B. AND PARNOVSKI L. Trapped modes in acoustic waveguides. // Quart. J. Mech. Appl. Math., V. 51 (1998). P. 477–492.
2. ДЕЛИЦЫН А.Л. Спектральные свойства задачи о нерегулярном волноводе. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. № 3. С. 75-76.
3. БОГОЛЮБОВ А.Н., ДЕЛИЦЫН А.Л., МАЛЫХ М.Д. О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23-25.
4. БОГОЛЮБОВ А.Н., МАЛЫХ М.Д. Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода. // Журнал радиоэлектроники. 2002. № 2.
5. ШЕСТОПАЛОВ В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.
6. МАЛЫХ М.Д. О поведении вложенных в непрерывный спектр собственных значений при изменении заполнения волновода. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2002. № 1. С. 61-62.